

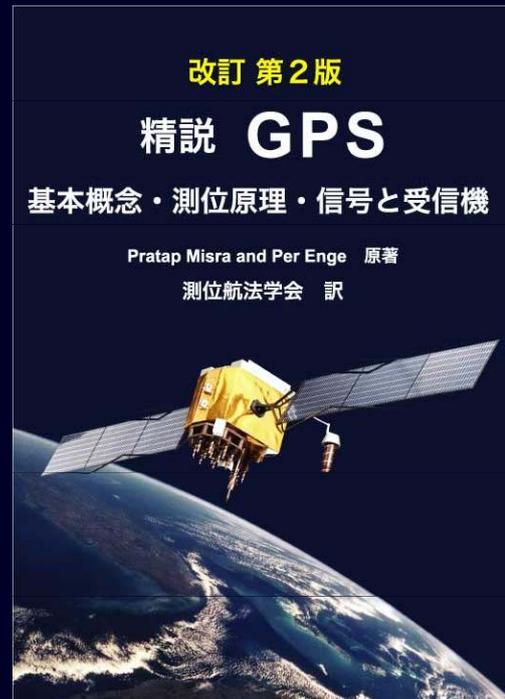
測位航法学会 平成22年度全国大会  
精説GPS第2版セミナー

# 精説GPS

## 第8章

### 信号と線形システム

 東京海洋大学 高須知二



## 改訂第2版 精説GPS



### 第I部 基礎

1 歴史 2 現在 3 将来 4 座標・時刻・軌道

### 第II部 位置・速度・時刻の推定

5 測定・誤差 6 PVT推定 7 高精度測位

### 第III部 GPS信号

8 理論 9 信号 10 SNR・精度

### 第IV部 受信機

11 捕捉 12 追尾 13 RFI

## 第8章 信号と線形システム

---

### 目次

- 8.1 概要
- 8.2 畳み込み
- 8.3 伝達関数と基底関数
- 8.4 フーリエ級数
- 8.5 フーリエ変換
- 8.6 ランダム信号
- 8.7 ラプラス変換
- 8.8 まとめ

## 第8章 信号と線形システム

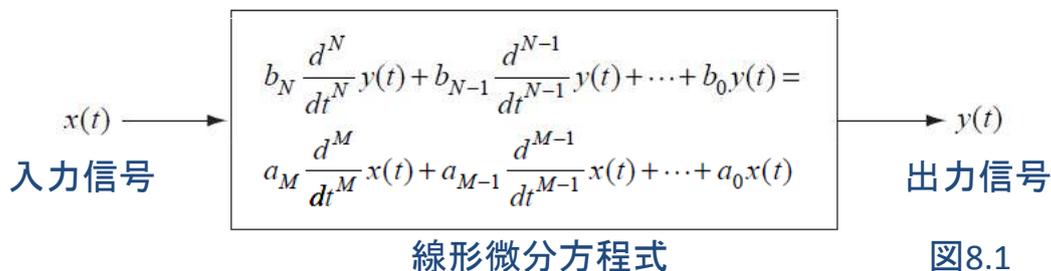
---

- 線形システムの基礎理論
  - 線形時不変システム・信号
  - 畳み込み・基底関数
  - 固有関数・伝達関数
  - フーリエ級数
  - フーリエ変換
  - フィルタ
  - ランダム信号・雑音
  - ラプラス変換
- 第III部、第IV部で使われる道具の復習

# 線形時不変システム

8.1.1

## 線形時不変 (LTI: Linear Time Invariant) システム



$$x(t) \xrightarrow{H} y(t)$$

$$k_1 x_1(t - \tau_1) + k_2 x_2(t - \tau_2) \xrightarrow{H} k_1 y_1(t - \tau_1) + k_2 y_2(t - \tau_2)$$

# 信号: 正弦波 (1)

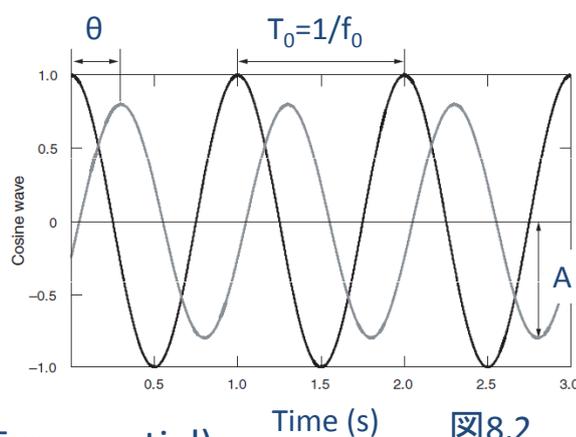
8.1.2

## コサイン波

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

$A$  : 振幅  $f_0$  : 周波数

$\theta$  : 位相



## 虚数指数関数 (Imaginary Exponential)

$$A \exp j(2\pi f_0 t + \theta)$$

$$\operatorname{Re}\{A \exp j(2\pi f_0 t + \theta)\} = A \cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

$$\operatorname{Im}\{A \exp j(2\pi f_0 t + \theta)\} = A \sin(2\pi f_0 t + \theta)$$

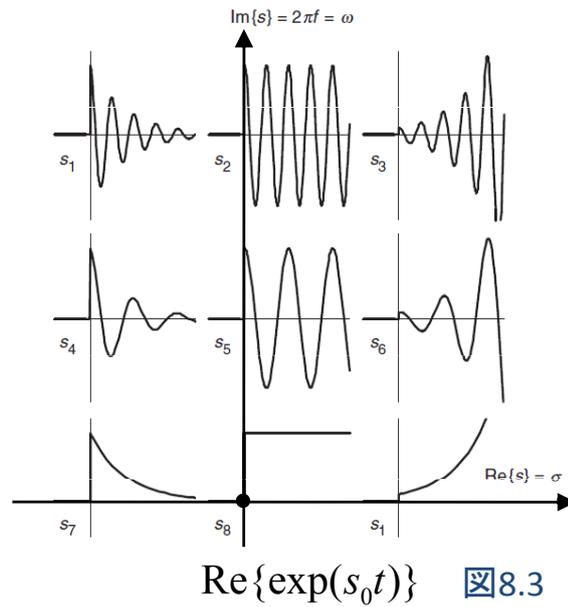
# 信号: 正弦波 (2)

8.1.2

複素指数関数  
(Complex Exponential)

$$A \exp(j\theta) \exp(s_0 t)$$
$$(s_0 = \sigma_0 + j2\pi f_0)$$

$A$  : 振幅     $s_0$  : 複素周波数  
 $\theta$  : 位相



# 信号: 特異関数 (1)

8.1.3

単位ステップ (階段) 関数  
単位ランプ (傾斜) 関数  
単位パラボラ (放物線) 関数  
単位パルス関数

$$p(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \leq t < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

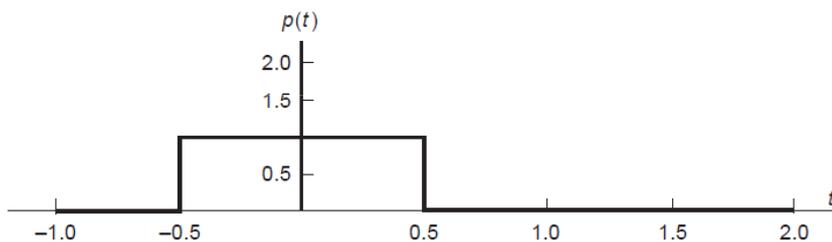
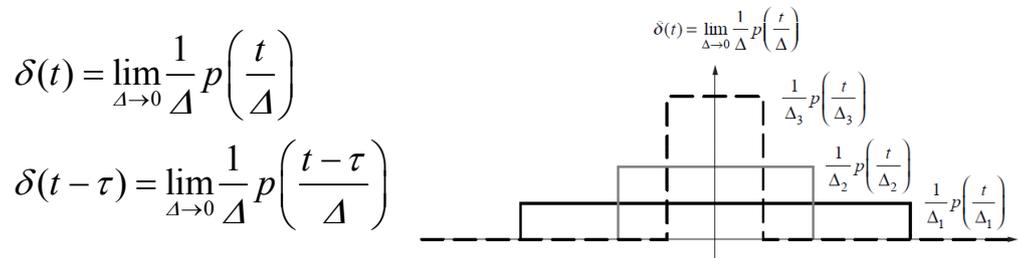


図8.4

単位インパルス: 一般化関数 or 超関数 (distribution)



ゼロの幅、無限大の振幅、単位面積

図8.5

ふるい分け (sift) の性質

$$\int_{t_0}^{t_2} x(t) \delta(t - t_1) dt = x(t_1) \quad (t_0 < t_1 < t_2)$$

信号エネルギー

$$\varepsilon = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt \quad (\text{J})$$

信号電力 (平均電力)

$$P = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt \quad (\text{W or J/s})$$

エネルギー信号 vs 電力信号

- エネルギー信号: 有限のエネルギー (例: パルス信号)
- 電力信号: 無限のエネルギー (例: 正弦波信号)

単位インパルス  $\delta(t) \xrightarrow{H} h(t)$  インパルス応答

入力  $x(t)$  に対するシステムの入力  $y(t)$  :

$$y(t) = \underbrace{x(t) * h(t)}_{\text{畳み込み}} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)h(t - \alpha)d\alpha$$

完全応答=(零入力応答)+零状態応答

システム因果律 +  $x(t) = 0 (t < 0)$

$$y(t) = \int_0^t x(\alpha)h(t - \alpha)d\alpha$$

正弦波  $x(t)$  に対するシステムの入力  $y(t)$  :

$$x(t) = A \exp(j2\pi f_0 t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau = \underbrace{A \exp(j2\pi f_0 t)}_{\text{正弦波}} \underbrace{H(f_0)}_{\text{伝達関数}}$$

伝達関数=インパルス応答のフーリエ変換

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \exp(-j2\pi f\tau)d\tau$$

$x(t) : y(t)$  振幅比:  $|H(f)|$  位相シフト:  $\angle H(f)$

区間  $(t_0, t_1)$  の任意の信号を関数和で表現:

$$x(t) = \sum_{n=-N}^N x_n \phi_n(t)$$

基底関数:  $\phi_n(t)$

$$\int_{t_0}^{t_1} \phi_n^*(t) \phi_k(t) dt = \begin{cases} 0 & n \neq k \\ \lambda_n & n = k \end{cases} \quad \text{直交 (正規直交: } \lambda_n = 1)$$

係数:  $\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$

$$x_n = \frac{1}{\lambda_n} \int_{t_0}^{t_1} \phi_n^*(t) x(t) dt \quad (x(t) \text{ と基底関数の相関})$$

## フーリエ級数

フーリエ基底:  $\phi_n(t) = \exp(j2\pi nt / T_0)$   $T_0$ : 周期

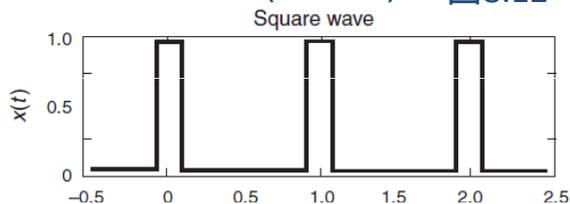
信号のフーリエ級数表現:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \exp(j2\pi nt / T_0)$$
$$x_n = \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) \exp(-j2\pi nt / T_0) dt$$

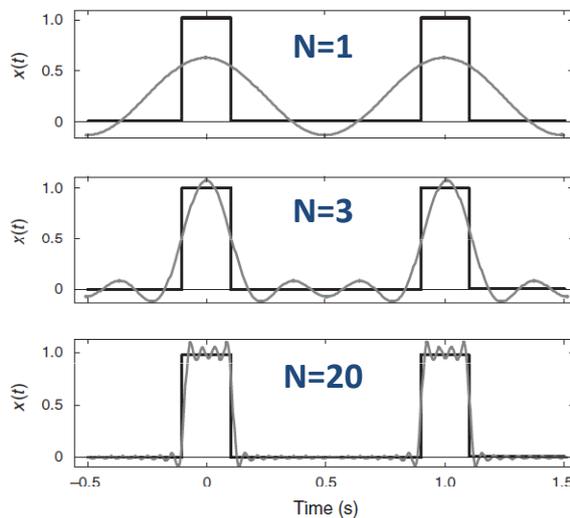
ディリクレ条件、収束性

パーセバルの定理:  $P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2$   $P$ : 信号電力

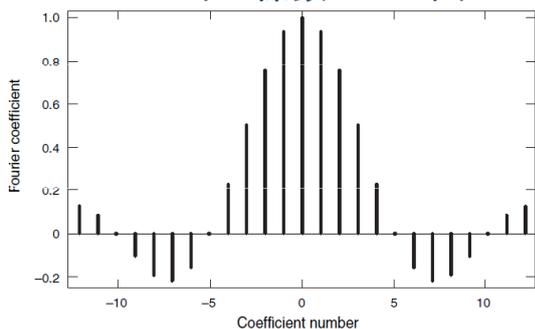
周期波形 (矩形波) 図8.12



フーリエ近似 図8.14



フーリエ係数 図8.13



## フーリエ変換 (1)

フーリエ級数からの導出:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \exp(-j2\pi n f_0 t) dt \right) \exp(j2\pi n t / T_0)$$

$$T_0 \rightarrow \infty$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi f t) dt \right) \exp(j2\pi f t) df$$

フーリエ変換

$$X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi f t) dt$$

フーリエ変換存在のための十分条件:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (x(t) \text{ が絶対可積分})$$

逆フーリエ変換

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp(j2\pi ft) df$$

逆フーリエ変換により  $X(f)$  から完全に曖昧性なく  $x(t)$  を復元可能

表8.1	時間関数	フーリエ変換
線形性	$k_1x(t) + k_2y(t)$	$k_1X(f) + k_2Y(f)$
微分	$\frac{dx}{dt}$	$j2\pi fX(f)$
対称性	$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(f)$	$\mathcal{F}\{X(t)\} = x(-f)$
周波数変換	$x(t) \exp(j2\pi f_0t)$	$X(f - f_0)$
変調	$x(t) \cos(2\pi f_0t)$	$\frac{1}{2}X(f - f_0) + \frac{1}{2}X(f + f_0)$
畳み込み	$x(t) * h(t)$	$X(f)H(f)$

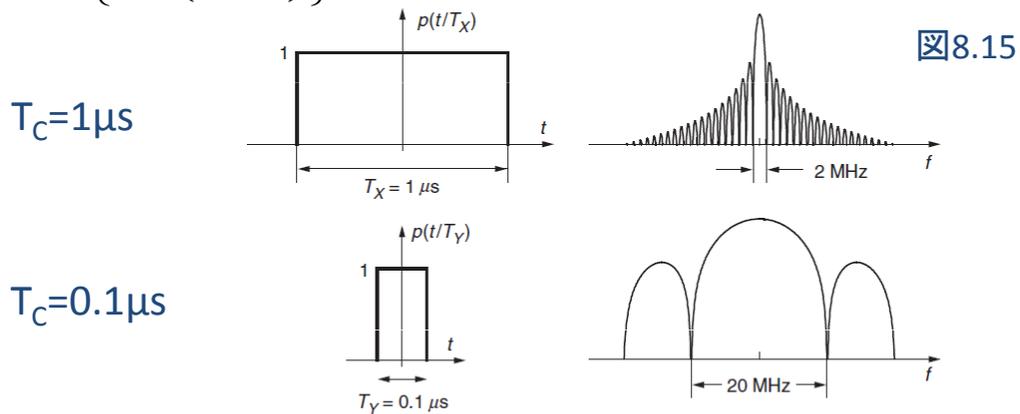
# 重要な関数の変換 (1)

8.5.4

## パルス関数のフーリエ変換

$$P(f) = \mathcal{F}\{p(t)\} = \text{sinc}(\pi f) \quad \left( \text{sinc}(x) \equiv \frac{\sin x}{x} \right)$$

$$\mathcal{F}\left\{ Ap \left( \frac{t - \tau}{T_C} \right) \right\} = AT_C \exp(-j2\pi\tau) P(fT_C)$$



# 重要な関数の変換 (2)

8.5.4

表8.2 時間関数

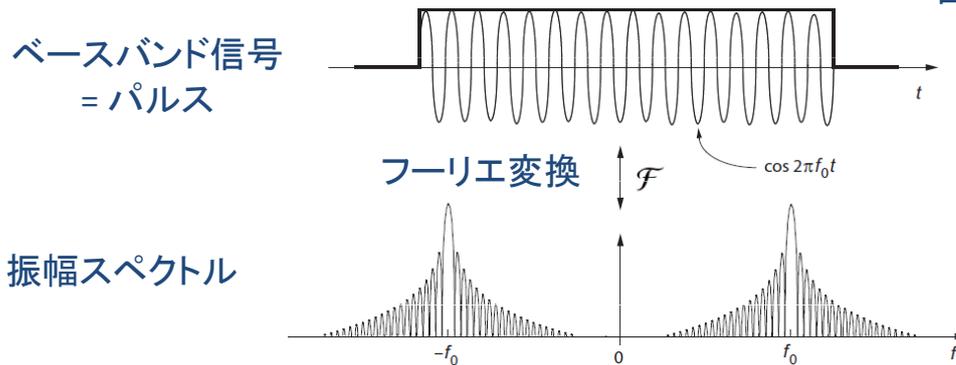
フーリエ変換

$\delta(t)$	1
$\delta(t - t_0)$	$\exp(-j2\pi ft_0)$
1	$\delta(f)$
$\exp(j2\pi f_0 t)$	$\delta(f - f_0)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0)$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2j}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2j}\delta(f + f_0)$

## 変調信号

$$s(t) = \underbrace{x(t)}_{\text{ベースバンド信号}} \underbrace{\cos(2\pi f_0 t)}_{\text{搬送波}}$$

図8.16



# 伝達関数とフィルタ

## 畳み込みによる入出力の記述 (8.2.1)

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (h(t): \text{インパルス応答})$$

$$\mathcal{F}\{x(t) * h(t)\} = X(f)H(f) \quad (\text{表8.1})$$

$$(X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}, H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\})$$

## 伝達関数による入出力の記述

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(f)H(f)\}$$

## 入出力エネルギースペクトルの関係

$$|Y(f)|^2 = |X(f)|^2 |H(f)|^2$$

- フィルタ
  - 伝達関数  $H(f)$  で表される特性を持つ線形システム
  - ローパスフィルタ
  - ハイパスフィルタ
  - バンドパスフィルタ
  - 理想フィルタ、移動平均、バターワースフィルタ
- 帯域幅
  - 信号またはフィルタのスペクトル幅
  - ナル間帯域幅、-3dB帯域幅
  - 片側帯域幅、両側帯域幅

- 決定論的信号
- ランダム (確率論的) 信号
- 確率密度関数
- モーメント (積率)
- エルゴード性
- ピリオドグラム
- 電力スペクトル密度 (PSD)
- ウィナー・ヒンチンの関係
- 白色雑音
- 等価雑音帯域幅

- 定義 8.7.1

$$\begin{aligned} X_L(s) &= \mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{F}\{x(t)\exp(-\sigma t)u(t)\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\exp(-st)dt \end{aligned}$$

- ラプラス変換の性質 8.7.2

- 線形性、微分、周波数変換、畳み込み...

- ラプラス変換の応用

- 線形微分方程式の解 8.7.4

- 特性方程式 8.7.5

- 初期値および最終値の定理 8.7.7

- 線形システムの基礎理論

- 線形時不変システム

- 信号

- 畳み込み → 9章

- フーリエ級数 → 11章

- フーリエ変換 → 9章

- ランダム信号 → 9章

- 白色雑音 → 10章、11章、12章

- ラプラス変換 → 12章